אלגברה 1 מ' -104016-
בוחן אמצע סמסטר חורף תשס"ד
פתרונות מלאים

שם משפחה:		שם פרטי:	
מס. סטודנט:		פקולטה:	

קרא בעיון את כל ההוראות:

- משך הבוחן שעתיים .
- אין להשתמש בחומר עזר.
- בבוחן 4 שאלות. יש לפתור את כל 4 השאלות.
- יש לענות על השאלות בצורה מסודרת ויש לנמק כל תשובה.
  יורדו נקודות על כתיבה מרושלת. **תשובה בלתי מנומקת לא תחשב**.
- יש לרשום את תוצאות החישובים במשבצות המיועדות לכך, המופיעות מיד אחרי השאלות. תוצאה שתרשם במקום אחר לא תחשב !
- יש לבצע את כל החישובים בתוך המחברת (ולמחוק בבירור טיוטות).

ב ה צ ל ח ה !

שאלות	ציון
שאלה מס' 1	
שאלה מס' 2	
שאלה מס' 3	
שאלה מס' 4	
סה"כ	

<u>שאלה מס. 1</u> : (30 נקודות)
נתונה המערכת הבאה של משוואות ליניאריות עם פרמטרים ממשיים α ו- β.

$$\begin{cases} x+y-z=-4 \\ -x-2y+z=3+\beta \\ 2x+y+(\alpha-3)z=\alpha\beta-9 \\ 2x \quad +(\alpha-3)z=\alpha\beta+2\beta-10 \end{cases}$$

א. מצא את כל הערכים של α ו- β עבורם למערכת פתרון יחיד.
ב. מצא את כל הערכים של α ו- β עבורם למערכת אין פתרון.
ג. מצא את כל הערכים של α ו- β עבורם למערכת אינסוף פתרונות.
ד. מצא את הפתרון הכללי של המערכת במקרה של אינסוף פתרונות.

פתרון שאלה מספר 1

נדרג את מטריצת המקדמים המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & 3+\beta \\ 2 & 1 & \alpha-3 & \alpha\beta-9 \\ 2 & 0 & \alpha-3 & \alpha\beta+2\beta-10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & \beta-1 \\ 0 & -1 & \alpha-1 & \alpha\beta-1 \\ 0 & -2 & \alpha-1 & \alpha\beta+2\beta-2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha\beta-\beta \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha\beta \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha\beta-\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right)$$

לפי שורה 4, אם $\beta \neq 0$ אז למערכת אין פתרון כי דרגת המטריצה המורחבת שונה מדרגת המטריצה המצומצמת. נציב $\beta = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha\beta-\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right) \underset{\beta=0}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אם מספר המשוואות אחרי הדרוג שווה למספר הנעלמים כלומר ל- 3, אז למערכת פתרון יחיד, וזה יקרה אם"ם אף איבר מוביל לא יתאפס. לכן פתרון יחיד יהיה אם"ם $\alpha \neq 1$.

עבור $\alpha=1$, נציב ונקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\alpha=1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי למערכת אינסוף פתרונות, ומספר דרגות החופש שווה ל- 1 = 2 - 3.

<u>תשובה לסעיפים א' – ג'</u>:
למערכת אין פתרון כאשר $\beta \neq 0$ (וכל α);
למערכת פתרון יחיד כאשר $\beta = 0$ ו- $\alpha \neq 1$;
למערכת אינסוף פתרונות כאשר $\beta = 0$ ו- $\alpha = 1$;

<u>תשובה לסעיף ד'</u>: יש לפתור את המערכת בכל המקרים בהם למערכת יש אינסוף פתרונות, כלומר כאשר: $\beta = 0$ וגם $\alpha = 1$. ניקח את המטריצה המורחבת המדורגת שקיבלנו קודם עבור $\beta = 0$ ו- $\alpha = 1$, נדרג לצורה קנונית ונפתור:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - z = -5 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z - 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (z-5, 1, z)$$

<u>שאלה מס. 2</u> : (30 נקודות)

יהי $V=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in R\}$

נגדיר תת מרחבים U ו- W ב- V ע"י

$$U=\{p(x)\in V \mid p(1)=0 \text{ ו } p'(0)=p'(1)\}$$

$$W=\{cx^2+cx+b \mid b,c\in R\}$$

(בהגדרת U $p(1)$ היא המספר הממשי שמתקבל מהפולינום $p(x)$ כאשר מציבים 1 במקום x ו- $p'(0)$ היא המספר הממשי המתקבל מהנגזרת של $p(x)$ כאשר מציבים 0 במקום x).

א. מצא בסיס ל- U .
ב. מצא בסיס ל- W .
ג. מצא את המימד של $U\cap W$
ד. האם $V=U+W$?
ה. מצא תת-מרחב Z של V כך ש- $W\oplus Z=V$. רשום בסיס ל- Z.

פתרון שאלה מספר 2

<u>סעיף א'</u>: נמצא בסיס ל- U:

$$U=\{p(x)\in V \mid p(1)=0 \text{ ו } p'(0)=p'(1)\}$$

$$p(x)=ax^2+bx+c$$

$$p(1)=0 \Rightarrow a+b+c=0$$

$$p'(x)=2ax+b$$

$$p'(0)=p'(1) \Rightarrow b=2a+b \Rightarrow a=0$$

$$U=\{ax^2+bx+c \mid a+b+c=0 \ , \ a=0\}=\{ax^2+bx+c \mid c=-b \ , \ a=0\}=$$

$$=\{bx-b \mid b\in R\}=\{b(x-1) \mid b\in R\}$$

קיבלנו כי U נפרש ע"י פולינום אחד שונה מ- 0, לכן {x-1} הוא בסיס ל- U, בפרט dimU = 1.

<u>סעיף ב'</u>: נמצא בסיס ל- W:

$$W = \{\ cx^2 + cx + b \ \mid\ b,c \in R\}$$

$$cx^2 + cx + b = c(x^2 + x) + b(1)$$

קיבלנו כי W נפרש ע"י שני פולינומים בת"ל (כי הם אינם פרופורציונליים), לכן הם מהווים בסיס ל- W, כלומר בסיס ל- w הוא: $\{x^2 + x\ ,\ 1\}$. בפרט, dimW = 2.

<u>סעיף ג'</u>: נמצא תחילה את המימד של U + W, ונחשב את המימד של $U \cap W$, באמצעות משפט המימדים: dim(U+W)=dimU+dimW-dim(U∩W):
לפי משפט איחוד הבסיסים של U ו- W נותן קבוצה פורשת למרחב הסכום, לכן ניקח את הבסיס ל- U שמצאנו בסעיף א' ואת הבסיס ל- W שמצאנו בסעיף ב', ונמצא בסיס למרחב U+W, ע"י בדיקת תלותליניארית בין וקטורי הקואורדינטות לפי בסיס הסטנדרטי:

$$W = Sp\{x^2 + x\ ,\ 1\}\ \ ;\ \ \ U = Sp\{x - 1\}\ \ \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dim(U + W) = 3$$

לכן, לפי משפט המימדים והתוצאות של סעיפים א' ו- ב' נקבל כי:

dim(U∩W) = dimU + dimW - dim(U+W) = 1 + 2 – 3 = 0

<u>סעיף ד'</u>: לפי החישובים בסעיף ג', קיבלנו כי: dim(U+W) = 3 = dimV, ולכן מתקיים כי V = U + W.

<u>סעיף ה'</u>: לפי סעיף ג' U∩W = {0}, לפי סעיף ד', V = U + W, לכן:
V = U⊕W לכן ניתן לקחת Z = U.
אפשרות אחרת (כלומר נמצא בסיס למרחב Z ששונה מהמרחב U) ע"י השלמת הבסיס של W לבסיס של כל V עם פולינום שלא נמצא ב- U:

$$W = Sp\{x^2 + x\ ,\ 1\}\ \ \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Z = Sp\{x + 2\} \neq U = Sp\{x - 1\}$$

שאלה מס. 3 : (20 נקודות)

א. תהיינה A ו- B מטריצות מרוכבות ריבועיות $n\times n$.
הוכח שאם $AB=0$ אז $r(A)+r(B)\le n$. כאן $r(A)$ ו- $r(B)$ הן הדרגות של A ושל B בהתאמה.

ב. תהיינה A ו- B מטריצות ממשיות ריבועיות כך ש- $AB=0$.
הוכח שאם למערכת $Ax=0$ מספר סופי של פתרונות אז למערכת $Bx=0$ מספר אינסופי של פתרונות.

ג. תהיינה A ו- B מטריצות ממשיות ריבועיות כך ש- $AB=0$.
הוכח שאם $A\neq 0$ ו- $B\neq 0$ אז למערכת $Ax=0$ ו- $Bx=0$ יש אינסוף פתרונות (לכל אחד).

פתרון שאלה מספר 3

סעיף א': נסמן ב- B^j את העמודה ה-j-ית של B. לפי הנתון, AB=0 לכן לכל $j=1,\dots,n$ מתקיים: $AB^j=0$, כלומר כל העמודות של המטריצה B שייכות למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית Ax=0. במילים אחרות, מרחב העמודות של B מוכל במרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית Ax=0 ולכן מימד מרחב העמודה של B, שהוא r(B), קטן או שווה למימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית Ax=0, שהוא n – r(A), כלומר $r(B)\le n-r(A)$. נעביר אגפים ונקבל:

$$r(A)+r(B)\le n$$

מ.ש.ל

סעיף ב': לפי הנתון, למערכת Ax=0 יש מספר סופי של פתרונות. נניח כי למערכת קיים פתרון v שונה מ- 0. מאחר ואוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית הוא מרחב וקטורי הרי שגם αv הוא פתרון לכל α מרוכב, כלומר אם למערכת Ax=0 יש פתרון לא טריוויאלי אז למערכת יש אינסוף פתרונות, בסתירה לנתון. לכן, מהנתון נובע כי למערכת Ax=0 יש פתרון יחיד והוא הפתרון הטריוויאלי. לפי משפט, אם A ריבועית אז A הפיכה אם"ם למערכת ההומוגנית Ax=0 פתרון הטריוויאלי בלבד. לכן מהנתון נובע כי A הפיכה, וקיימת מטריצה A^{-1}. נכפול את שני אגפי המשוואה הנתונה AB=0 ב- A^{-1} משמאל ונקבל B=0. לכן לכל v ב- R^n מתקיים Bv=0 כלומר למערכת Bx=0 יש אינסוף פתרונות.

אפשרות אחרת – באמצעות סעיף א': כאמור A הפיכה, לכן לפי משפט r(A) = n.
לפי הנתון AB=0 לכן לפי סעיף א' מתקיים:

$$r(A)+r(B)\le n$$
$$n+r(B)\le n$$
$$r(B)\le 0$$

אבל $r(B)\ge 0$, לכן

$$r(B)=0$$

קיבלנו כי B היא מטריצה מדרגה 0 כלומר B=0. לכן לכל v ב- R^n מתקיים Bv=0 כלומר למערכת Bx=0 יש אינסוף פתרונות.

סעיף ג': לפי סעיף א', אם אחת המטריצות היא הפיכה אז בהכרח המטריצה השנייה היא מטריצת האפס, בניגוד לנתון. לכן A ו- B הן מטריצות ריבועיות ולא הפיכות כלומר r(A) < n וגם r(B) < n. לכן למערכת Ax=0 יש אינסוף פתרונות וגם למערכת Bx=0 יש אינסוף פתרונות.

<u>שאלה מס. 4</u> : (20 נקודות)
הפרך ע"י דוגמא או הוכח את הטענות הבאות:

א. יהי W מספר מרוכב עם חלק ממשי שונה מ- 0 ויהי $Z=\overline{W}$. אז $\frac{Z^{2003}-W^{2003}}{Z+W}$ הוא מספר מדומה טהור.

ב. המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$ שקולה שורות ל- A^t אם ורק אם $a=b=1$.

ג. אם V הוא מרחב וקטורי ו- V_1,V_2,V_3 תת-מרחבים של V כך ש-
$V=V_1+V_2+V_3$ ו- $V_i\cap V_j=\{0\}$ לכל $1\le i,j\le 3,\ i\ne j$, אז כל וקטור v ב- V
ניתן לכתיבה יחידה ע"י $v=v_1+v_2+v_3$, כאשר $v_1\in V_1, v_2\in V_2, v_3\in V_3$

ד. אם v,u ו- w הם וקטורים במרחב וקטורי V המקיימים
$Span(\{u,w\})=Span(\{v,w\})$ אז $\{u,v\}$ היא קבוצה תלויה לינארית.

ה. אם v_1,v_2,v_3,v_4 הם וקטורים במרחב וקטורי V כך ש-

$$Span(\{v_1,v_2\})\cap Span(\{v_3,v_4\})=\{0\}$$

אז $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

פתרון שאלה מספר 4

<u>סעיף א'</u>: הטענה נכונה.

נתון $Z=\overline{W}$. נציב ב- $\frac{Z^{2003}-W^{2003}}{Z+W}$ ונקבל:

$$\frac{\overline{W}^{2003}-W^{2003}}{\overline{W}+W}=\frac{\overline{W^{2003}}-W^{2003}}{\overline{W}+W}=\frac{2i\,\mathrm{Im}(\overline{W^{2003}})}{2\,\mathrm{Re}(\overline{W})}=\frac{2\,\mathrm{Im}(\overline{W^{2003}})}{2\,\mathrm{Re}(\overline{W})}i$$

מאחר והחלק הממשי והחלק המדומה של מספר מרוכב הם מספרים ממשיים, הביטוי כולו הוא מדומה טהור.

<u>סעיף ב'</u>: הטענה לא נכונה.

ברור שאם $a=b=1$ אז A ו- A^t שקולות שורה כי A סימטרית לכן מרחב השורות של A ומרחב העמודות של A (שהוא מרחב השורות של A^t) שווים. מאחר והמטריצות A ו- A^t הן ריבועיות, הרי שאם למטריצות אותו מרחב שורה אז הן שקולות שורה.

הכיוון השני של הטענה איננו נכון. לכל a , b שנבחר כך ש- A הפיכה, נקבל כי מרחב השורות של A ומרחב העמודות של A שווים ל- R^2, ולכן שווים בניהם כלומר A ו- A^t שקולות שורה. לדוגמא:

$$a=0\ ,\ b=1$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

<u>סעיף ג'</u>: הטענה לא נכונה.

ניבחר:

$$V=R^2$$
$$V_1=(a,0)=Sp\{(1,0)\}$$
$$V_2=(0,b)=Sp\{(0,1)\}$$
$$V_3=(c,c)=Sp\{(1,1)\}$$

$$V_1\cap V_2=V_1\cap V_3=V_2\cap V_3=\{0\}$$

$$v=(1,2)\in V$$
$$v=1\cdot(1,0)+2\cdot(0,1)+0\cdot(1,1)$$
$$v=-3\cdot(1,0)-2\cdot(0,1)+4\cdot(1,1)$$
$$v=0\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)+1\cdot(1,1)$$

<u>סעיף ד'</u>: הטענה לא נכונה.

ניבחר:

$$V=R^2$$
$$u=(1,0)$$
$$v=(0,1)$$
$$w=(1,1)$$
$$Sp\{u,w\}=Sp\{v,w\}=R^2$$

אבל $\{u,v\}$ היא קבוצה בלתי תלויה ליניארית

<u>סעיף ה'</u>: הטענה לא נכונה.

דוגמא טריוויאלית היא כמובן כאשר כל ארבע הוקטורים שווים ל- 0.

דוגמא פחות טריוויאלית:

$$
\begin{aligned}
&V = R^2 \\
&v_1 = (1,0) \\
&v_2 = (2,0) \\
&v_3 = (0,1) \\
&v_4 = (0,2) \\
&Sp\{v_1, v_2\} \cap Sp\{v_3, v_4\} = \{0\}
\end{aligned}
$$

אבל הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ תלויה לינארית.